Теория игр–3
Листок 3. Контракты
Преподаватели: Рита Голуб
Дедлайн: 6 августа 2022 года, 21:00 МСК
Задачи в этом листке можно сдавать **только по порядку**.

Задача 1. Классика, наблюдаемая

У Маруси появилась гениальная идея нового приложения, но программировать она не умеет, поэтому ей надо нанять разработчика Катю. Успех нового приложения — величина случайная, но зависит от того, сколько усилий e приложит разработчик (0 или 1). Приложение в случае фантастического успеха принесет $x^s = 20$, а в случае посредственного успеха принесет $x^f = 10$. Если разработчик прикладывает усилия $e = 1$ (старательно избавляется от багов, делает приложение быстрым, удобным и красивым), то фантастический успех, как и посредственный успех, наступает с вероятностью 0.5. Если же разработчик халтурит и прикладывает усилия $e = 0$, то фантастический успех наступает с вероятностью всего 0.1, а посредственный, соответственно, — 0.9.

Полезность разработчика задается уравнением $u = \sqrt{w} - e$. У разработчика так же есть опция пойти работать разработчиком в «Плохую компанию» и стабильно иметь полезность $\underline{u} = 1$.

Прибыль Маруси — доход от успеха приложения x за вычетом расходов на зарплату Кате w.

Маруся — довольно опытный запускатель стартапов и уже научилась определять, прикладывает разработчик усилия или халтурит. **Какой контракт Маруся предложит разработчику?**

Задача 2. Классика, не наблюдаемая

Рынок стартапов не стоит на месте и разработка ушла так далеко, что Маруся теперь не может определять, сколько же усилий прикладывает разработчик — уж совсем на непонятном языке стал он разговаривать. **Какой контракт Маруся предложит разработчику, если другие условия из предыдущей задачи не изменились?**

Задача 3. Как много усилий!

Аркадий хочет запустить стартап, но ему, как и Марусе, надо нанять разраба. Проект специфический, поэтому разраб может прикладывать не два типа усилий, а три: $5/3$, $8/5$, $4/3$.

Успех стартапа x, как обычно, случаен, но зависит от приложенных усилий.

Если разраб прикладывает усилия $5/3$, то

$$x = \begin{cases} 10 & \text{с вероятностью } 2/3 \\ 0 & \text{с вероятностью } 1/3 \end{cases}$$

Если разраб прикладывает усилия $8/5$, то

$$x = \begin{cases} 10 & \text{с вероятностью } 1/2 \\ 0 & \text{с вероятностью } 1/2 \end{cases}$$

Если разраб прикладывает усилия $4/3$, то

$$x = \begin{cases} 10 & \text{с вероятностью } 1/3 \\ 0 & \text{с вероятностью } 2/3 \end{cases}$$

Полезность разработчика задается уравнением $u = \sqrt{w} - e$. У разработчика так же есть опция вообще не работать и получать полезность $\underline{u} = 1$.

Прибыль Аркадия — доход от успеха стартапа x за вычетом расходов на зарплату разрабу w.

Аркадий умеет определять, сколько усилий приложил разраб. Найдите контракт, который максимизирует ожидаемую прибыль Аркадия.

Задача 4. Как много усилий! Еще и ничего не понятно

В условиях предыдущей задачи найдите, на сколько меньше была бы прибыль Аркадия, если бы он не умел определять уровень усилий разраба, но все еще максимизирует свою прибыль.

Задача 5. У самого синего моря

Старуха посылает Старика к синему морю, чтобы он поймал ей золотую рыбку, которую она ценит в 12 монет. Рыбка нужна только Старухе, больше никому. Старуха обещает дать Старику зарплату в w монет за поход к морю и ещё дополнительный бонус в b монет, если он принесёт ей рыбку. Узнав эти условия (которые Старуха обязана исполнить!), Старик может выбрать одно из двух действий:

- пойти к морю, взять у лодочника в аренду лодку и попытаться поймать рыбку — шансы на успех и неудачу при этом равны;
- пойти к морю, посидеть на берегу и вернуться, сказав, что рыбку поймать не удалось.

Арендная плата за лодку составляет 5 монет и платится после получения всех выплат от Старухи. Но может получиться так, что этих выплат не хватит, — тогда Старик впоследствии, когда у него появятся монеты (предположим, что когда-нибудь это произойдёт), будет вынужден выплатить лодочнику сумму долга в двойном размере.

Старуха не может наблюдать, что делает Старик у моря. Она выбирает неотрицательные величины зарплаты w и бонуса b так, чтобы максимизировать свой усреднённый выигрыш Π, состоящий из ценности рыбки (в случае, если Старик её поймает) за вычетом всех выплат Старику. Например, если старуха рассчитывает, что Старик попробует поймать рыбку, то ее усреднённый выигрыш равен

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot (12 - w - b) + \frac{1}{2} \cdot (-w).$$

Старик, наблюдая w и b, выбирает одно из своих двух действий так, чтобы максимизировать свои усреднённые выплаты за вычетом того, что он должен отдать лодочнику. Усреднение производится по тому же принципу, что и для Старухи. Предполагаем, что, если Старику безразлично, ловить рыбку или нет, то он ловит.

а) Найдите оптимальное действие Старика при заданных $w, b \geqslant 0$;

б) Предположим, что Старуха хочет, чтобы Старик ловил рыбку. С учётом ответа на предыдущий пункт найдите w и b, оптимальные для неё в этом случае.

в) А действительно ли Старуха хочет, чтобы Старик ловил рыбку? Как устроен оптимальный контракт (w, b) с учётом ответа на этот вопрос?

г) Предположим теперь, что Старуха может наблюдать, что делает Старик у моря, и может поставить бонус $b \geqslant 0$ в зависимость от этого: если Старик выходил в море на лодке и поймал рыбку, то $b = b_1$, а если выходил, но не поймал, то $b = b_0$. Теперь Старуха предлагает Старику контракт (w, b_0, b_1). Какой контракт будет оптимальным для Старухи?