**Математика–3**
**Листок 2.** Квадратичная форма
**Преподаватели:** Игорь Карпов
**Дедлайн:** 2 августа 2022 года, 21:00 МСК
Задачи в этом листке можно сдавать **в любом порядке**.

---

**За задачи ниже «плюсики» не ставятся. Обсуждать с ассистентами их можно, только если есть свободный ассистент и нет очереди.**

---

## Задача 1

Найдите определители следующих матриц:

**а)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

**г)** $\begin{pmatrix} 2012 & 2013 & 2014 & 2015 \\ 2011 & 2013 & 2012 & 2010 \\ 2011 & 2011 & 2014 & 2010 \\ 2014 & 2016 & 2015 & 2021 \end{pmatrix}$

## Задача 2

Найдите обратную матрицу методом сопряженных определителей

**а)** $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 12 & 11 & 9 & 0 \\ 10 & 8 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

## Задача 3

Исследуйте следующие формы на знакоопределенность:

**а)**

$$x^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} x$$

**б)** $Q = 5x^2 + 7y^2 + 11z^2 - 2xy - 6xz + 4xz$
**в)** $Q = -4x^2 - y^2 + 2xy + 2xz - 4xz + 2xw$
**г)** $Q = \lambda x^2 + \lambda y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz - 4yz$

## Задача 4

**а)** Приведите следующую форму к каноническому виду методом Лагранжа:

$$Q = 5x^2 + 4xy + 8y^2$$

**б)** Приведите следующую форму к каноническому виду методом Якоби:

$$Q = x^2 + 4xy + 5y^2 + 12yz + 6xz + 10z^2$$

**Задача 5.** Поиск оптимума и проверка условий второго порядка

**а)** Пусть $f(x,y) = x^2 + 4xy + 5y^2 - 2y + 6xz + 12yz + 2z + 10z^2$, найдите точки локального экстремума функции и исследуйте их на максимум/минимум

**б)** Пусть $f(x,y) = x^2 + ay^4$, найдите точки локального экстремума функции и исследуйте их на максимум/минимум при всех возможных значениях параметра $a$. Понимаете ли вы теперь почему формулировки теоремы с лекции немного отличаются?

## Задача 6. † Это кстати чей-то диплом

$$\begin{pmatrix} 1 & x & \cdots & x & p \\ x & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x & \cdots & \cdots & 1 & p \\ p & \cdots & \cdots & p & 1 \end{pmatrix}$$

Докажите, что данная матрица положительно определена для $x \in [\frac{Np^2-1}{N-1}, 1]$, если она $N+1 \times N+1$.

*Hint. Теорема Сильвестра: Если* $A$, $B$ *это матрицы* $p \times n$ *и* $n \times p$, *то* $\det(I_p + AB) = \det(I_n + BA)$