Микроэкономика–3
Листок 6. Сложение и вычитание кривой Лоренца
Преподаватели: Игорь Карпов, Амир Шамсутдинов
Дедлайн: 12 августа 2022 года, 21:00 МСК
Задачи в этом листке можно сдавать **в любом порядке**.

Задача 1

В волшебной стране В было $n \geq 4$ групп населения, доходы в каждой были равномерно распределены, а средний доход (суммарный доход делить на суммарную долю) самых бедных и самых богатых вместе был равен среднему доходу населения. Потом волшебник Мерлин решил уравнять доходы всех кроме самых богатых и бедных, не трогая их суммарный доход. Если было известно что у самых бедных была доля 0.2 в населении, 0.1 в доходе, а доля самых богатых в населении была 0.1, то чему был равен коэффициент Джини после решения Мерлину? Удалось ли Мерлину снизить уровень неравенства?

Задача 2

В стране Альфа кривая Лоренца описывается функцией:

$$y = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0; 0{,}8] \\ 3x - 2, & x \in (0{,}8; 1] \end{cases}$$

А в стране Бета:

$$y = \begin{cases} \frac{x}{5}, & x \in [0; 0{,}5] \\ \frac{9x}{5} - \frac{4}{5}, & x \in (0{,}5; 1] \end{cases}$$

Известно, что в стране Альфа проживает 10 человек, а в стране Бета — 40 человек. Совокупный доход в каждой из стран равен 500 HS€. Страны решили объединиться в страну Гамма. Нарисуйте кривую Лоренца страны Гамма, запишите ее уравнение и найдите коэффициент Джини стран по отдельности и большой страны. Сократится или увеличится значение коэффициента Джини после объединения стран?

Задача 3

Рассмотрите объединение страны Альфа из задачи 1 со страной Лямбда, где также проживает 10 человек, совокупный доход равен 500 HS€ и кривая Лоренца записывается уравнением $y = x^2$. Запишите уравнение кривой Лоренца для этой объединенной страны.

Задача 4

Выведите кривую Лоренца для группы A, если кривая Лоренца страны имеет вид:

$$y = \begin{cases} 0.4x, & x \leqslant 0.4 \\ x^2, & x \in [0.4; 0.6] \\ 1.6x - 0.6, & x \geqslant 0.6 \end{cases}$$

а) A это люди с $x \in [0.4; 0.6]$.

б) A это люди с $x \in [0.3; 0.7]$.

(Никита Хоменко)

Определение 1 (Индекс Робин Гуда)**.** Минимальная доля суммарного дохода, которую нужно перераспределить, чтобы добиться абсолютного равенства доходов.

Задача 5

В стране Бета кривая зависимости дохода человека от его упорядоченной позиции в населении записывается уравнением $w(N) = 0.16N^3$. В стране живет 50 человек, а совокупный доход равен 250 000 HS€. Выведите кривую Лоренца и посчитайте индекс Робин Гуда и коэффициент Джини.

За задачи ниже «плюсики» не ставятся. Обсуждать с ассистентами их можно, только если есть свободный ассистент и нет очереди.

Задача 6. Дополнительная — 1

В стране Альфа кривая Лоренца описывается уравнением $y = x^3$. Известно, что в стране Альфа проживает 100 человек, а совокупный доход равен 1 000 000 HS€. Выведите из уравнения кривой Лоренца уравнение кривой зависимости дохода человека от его упорядоченной позиции в населении. Найдите коэффициент Джини и индекс Робин Гуда и сравните их.

Задача 7. Дополнительная — 2

Назовём индексом Гобина Руда (далее — $GR(y_1, y_2)$) минимальную долю суммарного дохода, которую нужно перераспределить, чтобы перейти от одного распределения доходов (y_1) к другому (y_2).

а) Найдите GR(y_1, y_2), где y_1, y_2 -- ломаные кривые Лоренца из двух звеньев, а их точки излома – $(0{,}4; 0{,}2)$ и $(0{,}8; 0{,}6)$ соответственно;

б) Найдите GR(y_1, x^2) (y_1 взят из предыдущего пункта);

в) Верно ли, что для любых двух рассматриваемых кривых Лоренца индекс Гобина Руда не может быть меньше модуля разности индексов Робина Гуда этих двух кривых?

(Шура Соколихин)

Задача 8. Матричный метод

В некоторой стране существует n групп населения, внутри каждой из групп доходы распределены равномерно. Точки излома кривой Лоренца этой страны имеют координаты $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, . . ., $(x_{n-1};\ y_{n-1})$, $(x_n;\ y_n)$, где $x_n = y_n = 1$.

а) Выразите площадь треугольника, точки которого имеют координаты (0; 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), причем $\frac{y_2}{x_2} > \frac{y_1}{x_1}$; $y_2 > y_1 > 0$; $x_2 > x_1 > 0$.

б) Докажите следующую формулу для коэффициента Джини этой страны:

$$G = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + \cdots$$