Теория игр–3
Листок 2. Неблагоприятный отбор
Преподаватели: Рита Голуб, Яна Коротова
Дедлайн: 4 августа 2022 года, 21:00 МСК
Задачи в этом листке можно сдавать **в любом порядке**.

Задача 1. Тренировочная

Путешественник во времени Марти, перемещаясь на 10 лет назад, случайно указал два времени года — весну и осень. Марти знает, что сейчас весна с вероятностью 0.4.

а) Какова вероятность того, что Марти попал в осень?

Дождь идет весной с вероятностью 0.3 и осенью с вероятностью 0.6 (и Марти это знает).

б) Какова вероятность того, что пойдет дождь?

Дождь пошёл.

в) Какова вероятность того, что Марти попал в весну?

г) Какова вероятность того, что Марти попал в осень?

Задача 2. НеЛимоны

Ситуация: вы пришли на рынок покупать айфон. Беда в том, что на рынке могут быть как новые оригинальные айфоны, так и подержанные или даже поддельные. Подробная информация представлена в таблице.

Тип	Вероятность	Ценность для продавца	Ценность для покупателя
Оригинальный	0.5	25	30
Подержанный	0.2	20	25
Поддельный	0.3	10	10

Продавцы максимизируют выручку.

а) Если информация о качестве айфонов наблюдаема всеми, сколько будут стоить айфоны каждого типа, если продавец может самостоятельно назначать цену?

б) Если покупатель не наблюдает тип айфона, какую ожидаемую ценность для него составляет случайный айфон (*каково математическое ожидание ценности айфона для покупателя*)?

в) Для каждой цены айфона p определите, айфоны какого типа продавец готов предлагать.

г) Если оба агента не наблюдают качество айфона, по каким ценам продавец готов их продавать, а покупатель — покупать? Произойдет ли торговля (*согласятся ли покупатель и продавец на такие цены*)?

Далее предполагайте, что покупатель знает, какова ценность айфона каждого типа для продавца и вероятности столкнуться с айфоном определенного типа, но не знает истинный тип айфона. Продавец наблюдает всё.

д) Если продавец предлагает айфоны по ценам $p \geqslant 25$, каких типов могут быть айфоны? Какова ожидаемая ценность айфона, предлагаемого по такой цене, для покупателя?

е) Если продавец предлагает айфоны по ценам $p \in [15, 20]$, каких типов могут быть айфоны? Какова ожидаемая ценность айфона, предлагаемого по такой цене, для покупателя?

ж) Ответьте на вопросы предыдущего пункта для каждой цены айфона p.

з) Найдите цену, которая установится в равновесии, если продавец максимизирует свою выручку. Предполагайте, что все покупатели и все продавцы ценят айфоны каждого типа одинаково в соответствии с таблицей, а вероятности для всех равны.

Задача 3. Страховки

В страховую компанию обратились два водителя: аккуратный (А) и безалаберный (Б). **Аккуратный** агент попадает в аварию с вероятностью 0.1. **Безалаберный** агент попадает в аварию с вероятностью 0.4. Оба игрока получают выигрыш от езды на машине равный 2 тысячам рублей. При аварии они теряют 1 тысячу рублей.

Страховая компания предлагает страховой план, стоимость которого равна 1, а выплата в случае аварии — p. Страховая компания максимизирует выигрыш. В случае, если страховая компания отказывается продавать страховку, она получает 0, но для неё предпочтительнее получить 0, если хотя бы один агент приобретает страховку. Иными словами, если при продаже страховки компания получает 0, она продает эту страховку.

Агенты могут попасть в аварию по одному, т.е. совсем не обязательно в одной аварии принимают участие оба агента.

а) Найдите ожидаемую полезность каждого из агентов в отсутствии страховки.

б) При каких значениях p агент А согласится приобрести страховку? А агент Б?

в) Чему равна ожидаемая прибыль страховой компании при каждом p?

г) Сколько будет выплачивать страховая компания в случае аварии? Какие водители станут покупать страховку?

Задача 4. Лучшие люди уходят

Как правило, в индустрии сотрудники разделяются на команды, которые специализируются на задачах определённой тематики, а члены команд имеют разный уровень и, соответственно, могут решать задачи разного уровня сложности. Рассмотрим небольшую задачу на эту тему.

В некоторой команде есть 4 сотрудника разного уровня. Самый сильный (1-ый) успешно выполняет задачу сложности p с вероятностью $1-p$, следующий по способностям (2-ой) с вероятностью $1-2p$, третий по способностям (3-ий) $1-4p$, самый младший (4-ый) по уровню с вероятностью $1-6p$. Каждый из участников любит интересные задачки, которые, как правило, сложнее. Так, например, 3-ий по способностям при получении задачи сложности p получит ожидаемую полезность $(1-4p)p$, поскольку за работу над сложными задачами (для уровня соответствующего сотрудника) их поощряют. У каждого работника также есть опция отказаться от выполнения задачи — в таком случае его полезность будет равна 0.

а) Задачи какой сложности наиболее предпочтительны для k-го по способностям?

Пусть каждая успешно выполненная задача сложности p приносит компании выигрыш p, а компания стремится получить максимальный выигрыш и выдает команде задачи одной сложности.

б) Чему равен ожидаемый выигрыш компании, когда работают все 4 сотрудника? А 3, если самый слабый отказывается? А 2, если два самых слабых отказываются? А 1, если три самых слабых отказываются? Для каждого из случаев укажите возможные значения p.

Предположим теперь также, что у каждого работника есть опция выйти на рынок труда и найти команду, в которой ему предложат задачу сложности более предпочтительной, чем он получает в этой команде. Однако, если на рынок одновременно выходят сотрудники разного уровня, раньше уйдет тот, кто обладает бóльшими компетенциями. Так, после того, как уходит самый сильный, компания заново пересчитывает возможные уровни сложности задач p, и оставшиеся работники заново принимают решение о том, оставаться или нет.

в) Задачи какой сложности будут решаться в команде? Сколько работников при этом останется?

Задача 5. Про образование

При найме потенциальный работодатель заинтересуется вашим образованием.

Пусть кандидаты могут быть двух типов — высокопродуктивные ($q = 2$) и низкопродуктивные ($q = 1$). Продуктивность работника отражается в количестве произведенной продукции. Например, низкопродуктивный работник может изготовить 1 кастрюлю ($q = 1$), тогда как высокопродуктивный — 2 ($q = 2$). Вероятность, с которой работник высокопродуктивный, равна 0.5. Качество образования измеряется некоторой величиной $e \in \{0,1\}$ и не влияет на продуктивность. $e = 0$ означает, что получено образование низкого качества.

Есть две идентичные фирмы. Работодатель не знает, является работник высокопродуктивным или нет, но наблюдает качество образования, полученного работником. Выигрыш (прибыль, выручка) каждого работодателя равна $q - w$, где w — стоимость труда работника.

Полезность работника равна $w - (3 - q)e$, где q — его продуктивность, e — уровень полученного образования. Если полезность агента равна 0 при согласии работать, то агент предпочтет не работать.

Взаимодействие устроено следующим образом:

1. Работник выбирает уровень образования e;
2. Работодатели наблюдают e, выбирают ставки заработной платы w и предлагают их агенту;
3. Работник соглашается только на одно из предложений (то, что с наибольшим платежом) и получает w или отказывается (не устраивается на работу) и получает 0.

а) Если работодатели могут предложить только одну ставку заработной платы всем работникам, какие значения она может принимать?

б) Если работодатели могут предложить несколько (разные) ставок заработной платы всем работникам, какие значения она может принимать в зависимости от уровня образования?