Математика–2
Листок 1. Производная
Преподаватели: Полина Королева, Андрей Петухов
Дедлайн: 1 августа 2022 года, 21:00 МСК
Задачи в этом листке можно сдавать **в любом порядке**.

Определение 1. *Производной* функции f в точке x_0 называется мгновенная скорость изменения функции в точке x_0. Обозначение - $f'(x_0)$, определяется как

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

Определение 2. *Касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется прямая с угловым коэффициентом $k = f'(x_0)$, проходящая через точку $(x_0;\ f(x_0))$. Уравнение касательной в точке x_0 описывается формулой

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Задача 1

Для каждой функции $f(x)$ найдите её производную $f'(x)$ и уравнение касательной в точке A. В пунктах **а)** и **б)** подкрепите решение иллюстрацией (постройте график и касательную).

а) $f(x) = 2x$, $A(3; 6)$
б) $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$, $A(4; 5)$;
в) $f(x) = \sqrt{x - 2}$;
г) $f(x) = 2^{x-1}$;
д) $f(x) = \sin(2x)$
е) $f(x) = \ln(x^2)$;
ж) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$;
з) $f(x, y, z) = x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В этом пункте найдите все частные производные функции f.

Задача 2

Для каждой функции g найдите её промежутки монотонности, а также глобальные и локальные минимумы и максимумы (если они есть).

а) $g(x) = 2^{-x^2+4x+2}$;
б) $g(y) = -2y^3 - 3y^2 + 36y - 1$;
в) $g(y) = \dfrac{y^2 + 1}{y}$;

Задача 3

Найдите все положительные значения параметра a, при которых у уравнения

$$2\ln(ax) = x + 4a - 4$$

существует единственное решение.

Задача 4

В каждом пункте найдите площадь фигуры, ограниченной соответствующими кривыми.

а) $y = -x^2 + 4x - 4$, $y = -4$;

б) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

в) $y = \sqrt[1000]{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ (в этом пункте округлите полученный результат до десятых);

Задача 5

Найдите площадь фигуры Ф, если она состоит в точности из тех точек $(x; y)$, которые удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} \sqrt{4 - \sqrt{x}} - x \geq \sqrt{3} - 1 \\ y \geq x^{2022} - 1011 \\ y \leq -\sqrt[2022]{x} + 1012 \end{cases}$$

За задачи ниже «плюсики» не ставятся. Обсуждать с ассистентами их можно, только если есть свободный ассистент и нет очереди.

Задача 6. Дополнительная задача

Рассматривается парабола $y = x^2$. Докажите, что любой вертикальный луч, отражаясь от параболы, приходит в некоторую фиксированную точку. Эта точка называется фокусом параболы, а такое свойство - *оптическим свойством параболы.*