



Факультет
экономических наук

Научно-учебная лаборатория
исследований спорта

Летняя экономическая школа
7 августа 2022 г.

Стратегическое голосование

Дмитрий Дагаев



«Слабое звено»

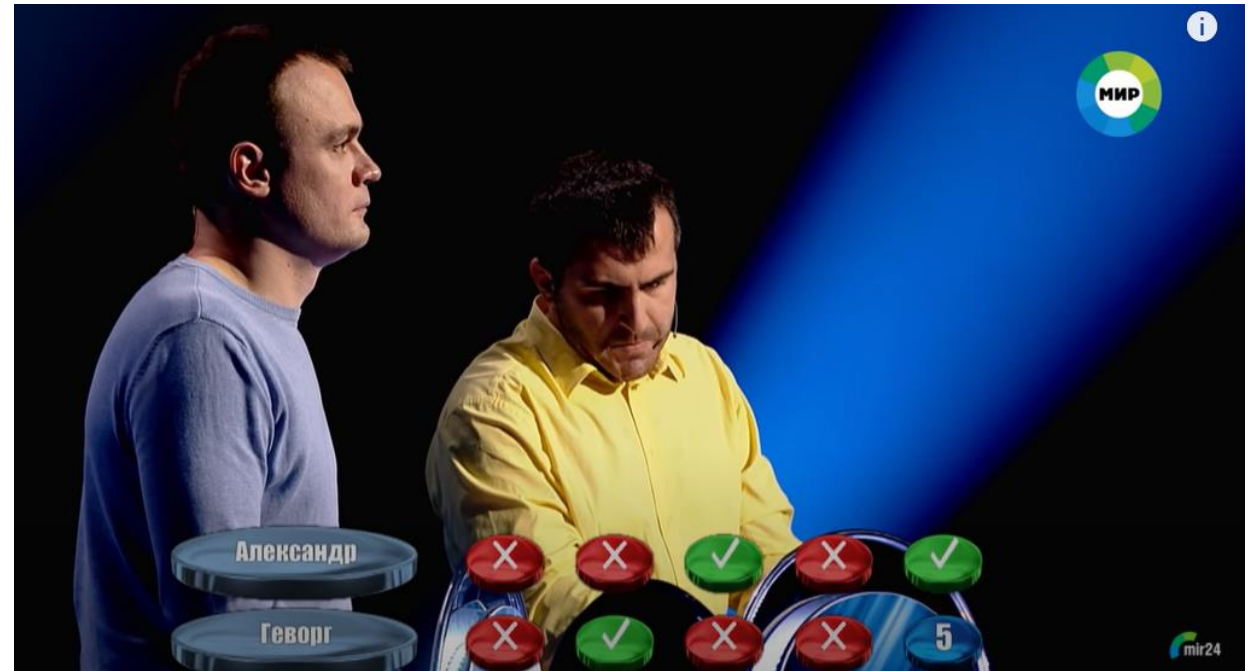
- Несколько участников отвечают на вопросы, из правильных ответов складывается суммарный банк
- После каждого раунда участники голосуют, кого выгнать из команды как слабое звено
- В последнем раунде два оставшихся игрока разыгрывают банк, соревнуясь в числе правильных ответов
- Выгоняют того, кто получил больше голосов против себя. Если число голосов одинаково, то решает голос сильного звена раунда
- С одной стороны, сильные участники приносят в банк больше денег
- С другой стороны, сильные участники являются опасными конкурентами!
- Как голосовать правильно?





Когда осталось трое

- Пусть один участник отвечает правильно на 90% вопросов, второй – на 30%, третий – на 25%
- По итогам раунда каждый участник набрал ожидаемое число правильных ответов
- Если голосовать искренне и выгонять самого слабого, то в последнем раунде, скорее всего, победит первый
- Второму и третьему это невыгодно: у них почти не будет шансов выиграть игру!
- Вместо этого можно выгнать эрудита!
- Тогда в финале у второго и третьего будут примерно равные шансы на победу



Стратегическое голосование

- Стратегическое голосование – это рациональное голосование, позволяющее получить наилучший возможный исход
- Оно не обязательно совпадает с истинными предпочтениями голосующего на множестве альтернатив
- Наилучшая альтернатива может быть недоступна из-за того, как голосуют все остальные
- Стратегическое голосование – проблема для организатора голосования, потому что оно не позволяет получить «настоящее» мнение голосующих
- Правила голосования важно анализировать на возможность стратегического голосования, чтобы не получить неожиданный результат





Формальная постановка задачи

- Есть набор альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- Пусть есть агенты $1, \dots, K$
- У агента i есть предпочтения \succsim_i на множестве альтернатив
- Каждый агент должен проголосовать за одну из альтернатив. Обозначим выбор агента i через s_i
- Задана известная всем функция общественного выбора f , которая любому профилю стратегий (s_1, \dots, s_K) ставит в соответствие одну из альтернатив множества A
- Вопрос: верно ли, что для любого набора предпочтений $(\succsim_1, \dots, \succsim_K)$ профиль (s_1, \dots, s_K) является равновесием Нэша?
- Если да, то говорят, что функция общественного выбора f неманипулируема
- Если нет, то говорят, что функция общественного выбора f манипулируема

Выбор страны-хозяйки чемпионата мира по футболу

- Мы не всегда знаем, как проголосовали отдельные агенты
- Однако сделать вывод о стратегическом характере голосования иногда можно по протоколам голосования
- Страну-хозяйку чемпионата мира по футболу выбирают так
- Есть несколько заявок, допущенных до голосования
- Члены Исполнительного комитета ФИФА голосуют за одну из заявок в первом туре
- Заявка, набравшая минимальное число голосов, выбывает
- Все повторяется во втором, третьем и т.д. турах, пока не останется одна заявка или пока одна из заявок не наберет более половины голосов





Выбор страны-хозяйки чемпионата мира по футболу 2022

- В таблице представлен протокол голосования за страну-хозяйку чемпионата мира по футболу 2022 года
- Можно ли сделать вывод о том, что кто-то из членов Исполнительного комитета ФИФА голосовал стратегически?
- Сколько стратегических голосов можно насчитать?

2022	1 тур	2 тур	3 тур	4 тур
Катар	11	10	11	14
США	3	5	6	8
Южная Корея	4	5	5	-
Япония	3	2	-	
Австралия	1	-		



Выборы мэра Москвы

- Выборы мэра Москвы проводятся по следующим правилам
- В первом туре избиратели голосуют за одного из допущенных до выборов кандидата
- Если один из кандидатов набрал более 50% голосов, то он объявляется победителем
- Если ни один из кандидатов не набрал более 50% голосов, то назначается второй тур, в который выходят 2 кандидата, набравшие больше всех голосов
- Во втором туре побеждает кандидат, набравший больше голосов



МОСКВЕ

ВАЖЕН

ВАШ ВЫБОР!

9 СЕНТЯБРЯ



Выборы мэра Москвы

- Предположим, что есть избиратель со следующими предпочтениями:

$$A > B > C > D$$

- Предположим, что социологические опросы показывают такое распределение голосов:
- A – 10%
- B – 25%
- C – 25%
- D – 40%
- За кого проголосует избиратель с такими предпочтениями?

✓ **ВЫБОРЫ**
МЭРА МОСКВЫ

МОСКВЕ

ВАЖЕН

ВАШ ВЫБОР!

9 СЕНТЯБРЯ



Существуют ли правила, не допускающие стратегического голосования?

- Да, существуют: например, пусть избиратель А полностью определяет исход выборов
- Тогда ни у одного из избирателей нет стимулов голосовать стратегически: А и так получит лучшую альтернативу, а от голосов остальных избирателей ничего не зависит
- Такой способ выбора альтернативы называется диктаторским



Существуют ли правила, не допускающие стратегического голосования?

- А что-нибудь получше диктаторского способа есть?
- Если альтернативы только 2, то да: при голосовании большинством манипулировать смысла нет
- Действительно, пусть все проголосовали за свою наилучшую альтернативу
- Пусть победила альтернатива А (то есть голосов за А больше, чем за В)
- Тем, кто голосовал за А, отклоняться смысла нет: А уже победила
- Тем, кто голосовал за В, отклоняться смысла нет: В получит еще меньше голосов в результате отклонения
- Значит, искреннее голосование – равновесие Нэша

Voting Ended 12/21/2017 12:13:54 PM

Item 5 Draft Resolution A/ES-10/L.22

Status of Jerusalem

<input type="checkbox"/> AFGHANISTAN	<input checked="" type="checkbox"/> CAMEROON	<input type="checkbox"/> FRANCE	<input type="checkbox"/> KYRGYZSTAN	<input type="checkbox"/> NETHERLANDS	<input type="checkbox"/> SERBIA	<input type="checkbox"/> UKRAINE
<input type="checkbox"/> ALBANIA	<input checked="" type="checkbox"/> CANADA	<input type="checkbox"/> GABON	<input type="checkbox"/> LAO PDR	<input type="checkbox"/> NEW ZEALAND	<input type="checkbox"/> SEYCHELLES	<input type="checkbox"/> UNITED ARAB EMIR...
<input type="checkbox"/> ALGERIA	<input type="checkbox"/> CENTRAL AFR REP...	<input type="checkbox"/> GAMBIA	<input checked="" type="checkbox"/> LATVIA	<input type="checkbox"/> NICARAGUA	<input type="checkbox"/> SIERRA LEONE	<input type="checkbox"/> UNITED KINGDOM
<input type="checkbox"/> ANDORRA	<input type="checkbox"/> CHAD	<input type="checkbox"/> GEORGIA	<input type="checkbox"/> LE BANON	<input type="checkbox"/> NIGER	<input type="checkbox"/> SINGAPORE	<input type="checkbox"/> UNITED REP TANZA...
<input type="checkbox"/> ANGOLA	<input type="checkbox"/> CHILE	<input type="checkbox"/> GERMANY	<input checked="" type="checkbox"/> LESOTHO	<input type="checkbox"/> NIGERIA	<input type="checkbox"/> SLOVAKIA	<input type="checkbox"/> UNITED STATES
<input checked="" type="checkbox"/> ANTIQUA-BARBUDA	<input type="checkbox"/> CHINA	<input type="checkbox"/> GHANA	<input type="checkbox"/> LIBERIA	<input type="checkbox"/> NORWAY	<input type="checkbox"/> SLOVENIA	<input type="checkbox"/> URBURGIA
<input type="checkbox"/> ARGENTINA	<input checked="" type="checkbox"/> COLOMBIA	<input type="checkbox"/> GREECE	<input type="checkbox"/> LIBYA	<input type="checkbox"/> OMAN	<input checked="" type="checkbox"/> SOLOMON ISLANDS	<input type="checkbox"/> UZBEKISTAN
<input type="checkbox"/> ARMENIA	<input type="checkbox"/> COMOROS	<input type="checkbox"/> GRENADA	<input type="checkbox"/> LIECHTENSTEIN	<input type="checkbox"/> PAKISTAN	<input type="checkbox"/> SOMALIA	<input checked="" type="checkbox"/> VANUATU
<input checked="" type="checkbox"/> AUSTRALIA	<input type="checkbox"/> CONGO	<input type="checkbox"/> GUATEMALA	<input type="checkbox"/> LITHUANIA	<input type="checkbox"/> PALAU	<input type="checkbox"/> SOUTH AFRICA	<input type="checkbox"/> VENEZUELA (BOLIV...
<input type="checkbox"/> AUSTRIA	<input type="checkbox"/> COSTA RICA	<input type="checkbox"/> GUINEA	<input type="checkbox"/> LUXEMBOURG	<input checked="" type="checkbox"/> PANAMA	<input checked="" type="checkbox"/> SOUTH SUDAN	<input type="checkbox"/> VIET NAM
<input type="checkbox"/> AZERBAIJAN	<input type="checkbox"/> COTE D'IVOIRE	<input type="checkbox"/> GUINEA-BISSAU	<input type="checkbox"/> MADAGASCAR	<input type="checkbox"/> PAPUA NEW GUINEA	<input type="checkbox"/> SPAIN	<input type="checkbox"/> YEMEN
<input checked="" type="checkbox"/> BRAHMAS	<input checked="" type="checkbox"/> CROATIA	<input type="checkbox"/> GUYANA	<input checked="" type="checkbox"/> MALAWI	<input checked="" type="checkbox"/> PARAGUAY	<input type="checkbox"/> SRI LANKA	<input type="checkbox"/> ZAMBIA
<input type="checkbox"/> BAHRAIN	<input type="checkbox"/> CUBA	<input checked="" type="checkbox"/> HAITI	<input type="checkbox"/> MALAYSIA	<input type="checkbox"/> PERU	<input type="checkbox"/> SUDAN	<input type="checkbox"/> ZIMBABWE
<input type="checkbox"/> BANGLADESH	<input type="checkbox"/> CYPRUS	<input type="checkbox"/> HONDURAS	<input type="checkbox"/> MALDIVES	<input checked="" type="checkbox"/> PHILIPPINES	<input type="checkbox"/> SURINAME	
<input type="checkbox"/> BARBADOS	<input checked="" type="checkbox"/> CZECH REPUBLIC	<input checked="" type="checkbox"/> HUNGARY	<input type="checkbox"/> MALI	<input checked="" type="checkbox"/> POLAND	<input type="checkbox"/> SWAZILAND	
<input type="checkbox"/> BELARUS	<input type="checkbox"/> DEM PR OF KOREA	<input type="checkbox"/> ICELAND	<input type="checkbox"/> MALTA	<input type="checkbox"/> PORTUGAL	<input type="checkbox"/> SWEDEN	
<input type="checkbox"/> BELGIUM	<input type="checkbox"/> DEM REP OF CONGO	<input type="checkbox"/> INDIA	<input type="checkbox"/> MARSHALL ISLANDS	<input type="checkbox"/> QATAR	<input type="checkbox"/> SWITZERLAND	
<input type="checkbox"/> BELIZE	<input type="checkbox"/> DENMARK	<input type="checkbox"/> INDONESIA	<input type="checkbox"/> MAURITANIA	<input type="checkbox"/> REP OF KOREA	<input type="checkbox"/> SYRIAN ARAB REP...	
<input type="checkbox"/> BENIN	<input type="checkbox"/> DJIBOUTI	<input checked="" type="checkbox"/> IRAN (ISLAMIC REP...)	<input type="checkbox"/> MAURITIUS	<input type="checkbox"/> REP OF MOLDOVA	<input type="checkbox"/> TAJIKISTAN	
<input checked="" type="checkbox"/> BHUTAN	<input type="checkbox"/> DOMINICA	<input type="checkbox"/> IRAQ	<input checked="" type="checkbox"/> MEXICO	<input checked="" type="checkbox"/> ROMANIA	<input type="checkbox"/> THAILAND	
<input type="checkbox"/> BOLIVIA (PLURINAT...)	<input checked="" type="checkbox"/> DOMINICAN REP...	<input type="checkbox"/> IRELAND	<input type="checkbox"/> MICRONESIA (FS)	<input type="checkbox"/> RUSSIAN FED...	<input type="checkbox"/> THE FYR MACEDONIA	
<input checked="" type="checkbox"/> BOSNIA-HERZEGOVI...	<input type="checkbox"/> ECUADOR	<input type="checkbox"/> ISRAEL	<input type="checkbox"/> MONACO	<input checked="" type="checkbox"/> RWANDA	<input type="checkbox"/> TIMOR-LESTE	
<input type="checkbox"/> BOTSWANA	<input type="checkbox"/> EGYPT	<input type="checkbox"/> ITALY	<input type="checkbox"/> MONGOLIA	<input type="checkbox"/> SAINT KITS-NEVIS	<input type="checkbox"/> TOGO	
<input type="checkbox"/> BRAZIL	<input type="checkbox"/> EL SALVADOR	<input type="checkbox"/> JAMAICA	<input type="checkbox"/> MONTENEGRO	<input type="checkbox"/> SAINT LUCIA	<input type="checkbox"/> TONGA	
<input type="checkbox"/> BRUNEI DARUSSAL...	<input type="checkbox"/> EQUATORIAL GUINEA	<input type="checkbox"/> JAPAN	<input type="checkbox"/> MOROCCO	<input type="checkbox"/> SAINT VINCENT-GR...	<input checked="" type="checkbox"/> TRINIDAD-TOBAGO	
<input type="checkbox"/> BULGARIA	<input type="checkbox"/> ERITREA	<input type="checkbox"/> JORDAN	<input type="checkbox"/> MOZAMBIQUE	<input type="checkbox"/> SAMOA	<input type="checkbox"/> TUNISIA	
<input type="checkbox"/> BURKINA FASO	<input type="checkbox"/> ESTONIA	<input type="checkbox"/> KAZAKHSTAN	<input type="checkbox"/> MYANMAR	<input type="checkbox"/> SAN MARINO	<input type="checkbox"/> TURKEY	
<input type="checkbox"/> BURUNDI	<input type="checkbox"/> ETHIOPIA	<input type="checkbox"/> KENYA	<input type="checkbox"/> NAMIBIA	<input type="checkbox"/> SAO TOME-PRINCIPE	<input type="checkbox"/> TURKMENISTAN	
<input type="checkbox"/> CABO VERDE	<input checked="" type="checkbox"/> FIJI	<input checked="" type="checkbox"/> KIRIBATI	<input type="checkbox"/> NAURU	<input type="checkbox"/> SAUDI ARABIA	<input checked="" type="checkbox"/> TUVALU	
<input type="checkbox"/> CAMBODIA	<input type="checkbox"/> FINLAND	<input type="checkbox"/> KUWAIT	<input type="checkbox"/> NEPAL	<input type="checkbox"/> SENEGAL	<input checked="" type="checkbox"/> UGANDA	

IN FAVOUR: 128 AGAINST: 9 ABSTENTION: 35



Существуют ли правила, не допускающие стратегического голосования?

- А вот если победить могут хотя бы 3 альтернативы, то ситуация в корне меняется!
- Пусть игроки голосуют, указывая свои полные предпочтения
- Выбор общества по-прежнему является одной альтернативой
- **Определение.** Будем говорить, что функция $f(\succsim_1, \dots, \succsim_k)$ обладает свойством единогласия, если из того, что $a \succsim_i b$ для всех i , следует, что $f(\succsim_1, \dots, \succsim_k) \neq b$
- **Теорема Гиббарда – Саттертуэйта** (1973, 1975). Пусть $|A| \geq 3$, а каждый агент имеет строгие предпочтения на множестве этих альтернатив. Если функция общественного выбора $f(\succsim_1, \dots, \succsim_k)$ обладает свойством единогласия и не является манипулируемой, то она диктаторская.



Доказательство

Пусть f неманипулируема. Докажем, что она диктаторская

Утверждение 1. Пусть в некотором профиле предпочтений была выбрана альтернатива A . Тогда если один из агентов поднял в своих предпочтениях альтернативу X , то в новом профиле предпочтений будет выбрана либо A , либо X

Доказательство. Если бы, от противного, была выбрана новая альтернатива C , то сравним A и C для i . Если A лучше C , то f манипулируема: i предпочтет отклониться от нового профиля, в котором выбрана C

Если A хуже C , то f манипулируема: i предпочтет отклониться от старого профиля, в котором выбрана A



Доказательство

Будем искать игрока, который является диктатором

Начнем с профиля, в котором некоторая альтернатива B — последняя альтернатива у всех агентов

Тогда B не может быть выбрана, так как f обладает свойством единогласия

Начнем поднимать B на первое место в предпочтениях агентов подряд, начиная с первого агента

Рано или поздно общество должно начать выбирать B (как минимум, когда все проголосуют за B — из-за единогласия никакая другая альтернатива точно не будет выбрана!)



Доказательство

Пусть r — решающий агент, то есть в этом Профиле 1 B еще не выбрана:

1	2	\dots	$r-1$	r	$r+1$	\dots	n
B	B	$B \dots$	B	K	A	\dots	C
D	E		\vdots	\vdots			\vdots
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
T	F		S	B	B	$B \dots$	B

А в этом Профиле 2 B уже выбрана:

1	2	\dots	$r-1$	r	$r+1$	\dots	n
B	B	$B \dots$	B	B	A	\dots	C
D	E		\vdots	K			\vdots
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
T	F		S		B	$B \dots$	B



Доказательство

Утверждение 2

2.1. B будет выбрана в любом профиле, в котором первые r агентов ставят B на первое место

2.2. B не будет выбрана в любом профиле, в котором агенты r, \dots, n ставят B на последнее место

Доказательство от противного. Например, в 2.1, отклоняем по одному агентов от Профиля 2. Рассмотрим любые другие предпочтения $r + 1$. Если в таком профиле B не выбрана, то f манипулируема в Профиле 2, так как $r + 1$ предпочтет данный профиль Профилю 2. Далее повторяем рассуждения, меняя предпочтения остальных агентов по одному.



Доказательство

Утверждение 3. r является диктатором

Доказательство. Рассмотрим произвольный профиль вида справа. Будем доказывать, что с помощью f выберут K .

Сначала перетащим K на первое место для всех. Тогда из единогласия будет выбрана K .

Теперь перетащим B на первое место у агентов $1, \dots, r - 1$. По утверждению 2 альтернатива B не выбрана. Значит, по утверждению 1 выбрана K .

Подтянем B на второе место у r . K по-прежнему выбрана — иначе бы r отклонился от этого профиля в предыдущий

1	2	\dots	$r - 1$	r	$r + 1$	\dots	n
?	?	$?\dots$?	K	?	\dots	?
?	?		\vdots				\vdots
				\vdots	\vdots		\vdots
B	B	B	B	B	B	$B \dots$	B

1	2	\dots	$r - 1$	r	$r + 1$	\dots	n
B	B	$B \dots$	B	K	K	$K \dots$	K
K	K	$K \dots$	K	?	?	$?\dots$?
				\vdots	\vdots		\vdots
\vdots	\vdots		\vdots				\vdots
?	?		?	B	B	$B \dots$	B

1	2	\dots	$r - 1$	r	$r + 1$	\dots	n
B	B	$B \dots$	B	K	K	$K \dots$	K
K	K	$K \dots$	K	B			\vdots
				\vdots	\vdots		\vdots
\vdots	\vdots		\vdots				\vdots
?	?		?		B	$B \dots$	B



Доказательство

Утверждение 3. g является диктатором

Рассмотрим снова профиль вида справа. Пусть в нем выбрана $G \neq K$. Поднимем для агентов $1, \dots, g-1$ на первое место B . B не может быть выбрана по утверждению 1, поэтому выбрана по-прежнему G .

Перейдем к профилю справа. Предположим, B не выбрана. Тогда выбрана G . Если у g поставим B на первое место, то выберем B по утверждению 1. Тогда g может манипулировать, так как B для него лучше $G \neq K$.

Значит, B выбрана. Поднимем K на второе место для $1, \dots, g-1$ и на первое для $g+1, \dots, n$. Тогда B по-прежнему выбрана (иначе агенты $1, \dots, g-1$ могли бы манипулировать, возвращаясь к исходному профилю, а агенты $g+1, \dots, n$ – наоборот). Но мы доказали, что в таком профиле выбирается K ! Значит, $G = K$ — противоречие. Значит, в профиле сверху выбрана именно альтернатива $G = K$

1	2	\dots	$g-1$	g	$g+1$	\dots	n
?	?	$?\dots$?	K	?	\dots	?
?	?		\vdots				\vdots
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
B	B	B	B	B	B	$B \dots$	B

1	2	\dots	$g-1$	g	$g+1$	\dots	n
B	B	$B \dots$	B	K	?	\dots	?
?	?		\vdots	B			\vdots
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
?	?		?		B	$B \dots$	B



Доказательство

Теперь готовы доказать, что g — диктатор.

Рассмотрим произвольный профиль. Пусть g ставит на первое место $K \neq B$. Докажем, что будет выбрана K .

Опустим B вниз для всех агентов. По доказанному на Шаге 2 в таком профиле выбрана K .

Восстановим B на первоначальное положение. По утверждению 1 будет выбрана K или B .

Рассмотрим профиль справа, где $C \neq B$, $C \neq K$. Построим решающего агента m для альтернативы C , аналогично тому, как мы построили решающего агента g для альтернативы B . В данном профиле, как и в Шаге 2, m получит свою топ-альтернативу.

С другой стороны, в этом профиле по утверждению 1 выбирается B .

Значит, $m \leq g$.

Но симметрично можно показать, что $g \leq m$. Значит, $g = m$

1	2	\dots	$r-1$	r	$r+1$	\dots	n
B	B	$B \dots$	B	B	A	A	A
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
C	C	C	C	C	C	$C \dots$	C



Доказательство

Уже знали, что в произвольном профиле выбирается К или В

Доказали, что в произвольном профиле выбирается К или С

Значит, выбирается К и значение функции совпадает с топ-альтернативой диктатора

Наконец, для профилей, в которых $K = B$, аналогично покажем, что g является решающим для А (и для С)

Значит, аналогичными рассуждениями покажем, что будет выбрана В

Значит, g — диктатор, что и требовалось доказать.